

# Sistematiko

## Kalkulaj simboloj sabimaj

Martin Strid

Originalo en Lingvo Internacia.

© Kopirajtas la verkinto 2012-2013.

Originalo libere disdoneblas.

Traduko bezonas permeson skriban de la kopirajtanto.

Ankoraŭ ne presita.

# Antaŭparolo

Dum studoj en teĥnika universitato, min iritis la ajneco de matematika simbolaro. Sama skribmaniero povis jen punkton signifi, jen angulon, jen funkcion, jen ion tute alian. Por kompreni kio estis kalkulata necesis klariga teksto en iu parolata lingvo. En tiu tempo, ĉirkaŭ jaro 1980, mi kompilis propran matematikan simbolaron pli koheran, kiun mi jen, post iom da reredakto, transdonas al interesatoj, kune kun utiligo de langolaj majuskloj kajaŭ minuskloj.

Mi dankas al niaj instruistoj, sen kies klopodoj klarigaj mi ne malkovrus tiun mankon matematikan, kiun per ĉi kajero mi volas forigi.

La unua langola literaro uzata kun sabimaj ciferoj kaj sistematematiko estis la runoj. Don ankaŭ ili ĉi tie prezentiĝas.

Martin Strid, Stora Tuna, Svedujo, jule 2012.

# Legendo pri Saba

”Oni rakontas ke iam Saba fariĝis reĝino de granda lando norde, en kies centro troviĝas Gaŭtang, la kvazaŭ senfina vastejo de gaŭtoj. Tie ŝi enkondukis juron sur bazo de federalisma demokratio kaj lerte ellaboritaj sistemoj de interkompreno. Ŝian imperion oni komencis nomi als Sabimo. En ĝi estis multaj diversaj nacioj arbaraj, montaraj kaj marbordaj kaj tute mankis la tradicioj de feŭdismo kaj sklaveco kiuj ŝajnis pli malpli normalaj en la fekundaj sudaj ebenaĵoj.

En sudorienta flanko de Sabimo estis tiam tri grandaj nacioj, Ciklogo, Aĉolarvo kaj Langolo. Ilin ofte atakis militestroj de ebenaĵoj, sed ili lernis bone defendi sin. Iliaj kulturoj multe influis al Sabimaj komunaj kutimoj. Ciklogo donis sian kalendaron, kiu per sia reguleco fariĝis granda helpilo en organizo de ĉiutaga vivo de ĉiuj sabimaj triboj. Langoloj havis skribsistemon kiun, post kiam Saba malkovris ĝin, ili ricevis taskon disvolvi tiel ke ĝi taŭgu por ĉiuj lingvoj de Sabimo, ne nur por la langola. Tiu projekto produkti langolan skribon modernigitan fariĝis tiom granda inspiro al intelektuloj ke pro ĝi fondiĝis la unua universitato. En tiu universitato poste oni krome ellaboris tiun matematikan simbolaron, kiu nomiĝas sabima sistematematiko.”

- Msiklajev, en sia kroniko pri Mahanaim, la popolo de klanuĉoj kaj klaninoj.

# Sistematematiko

## *Sabimaj ciferoj*

Langole ciferojn kaj majuskle kaj minuskle oni sabimajn uzas. Ciferon oni skribas malsupren unustreke sen levi skribilon. Jen ili, tutaltaj de nul ĝis naŭ (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9):

0 1 1̂ 2 2̂ 3 6 6̂ 9 9̂

Per signetoj sur la "tigoj" skribeblas aparta sabima cifero por ĉiu nombro ĝis cent. Tio utilas ekzemple se oni volas uzi nombrobazon pli grandan ol dekuman. Jen tiaj ciferoj de nul ĝis dudek (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20):

0 1 1̂ 2 2̂ 3 6 6̂ 9 9̂ Ψ Ψ̂ Ψ̃ Ψ̄ Ψ̅ Ψ̆ Ψ̇ Ψ̈ Ψ̉ Ψ̊ Ψ̋ Ψ̌ Ψ̍ Ψ̎ Ψ̏ Ψ̐ Ψ̑ Ψ̒ Ψ̓ Ψ̔ Ψ̕ Ψ̖ Ψ̗ Ψ̘ Ψ̙ Ψ̚ Ψ̛ Ψ̜ Ψ̝ Ψ̞ Ψ̟ Ψ̠ Ψ̡ Ψ̢ Ψ̣ Ψ̤ Ψ̥ Ψ̦ Ψ̧ Ψ̨ Ψ̩ Ψ̪ Ψ̫ Ψ̬ Ψ̭ Ψ̮ Ψ̯ Ψ̰ Ψ̱ Ψ̲ Ψ̳ Ψ̴ Ψ̵ Ψ̶ Ψ̷ Ψ̸ Ψ̹ Ψ̺ Ψ̻ Ψ̼ Ψ̽ Ψ̾ Ψ̿ Ψ̿̂ Ψ̿̃ Ψ̿̄ Ψ̿̅ Ψ̿̆ Ψ̿̇ Ψ̿̈ Ψ̿̉ Ψ̿̊ Ψ̿̋ Ψ̿̌ Ψ̿̍ Ψ̿̎ Ψ̿̏ Ψ̿̐ Ψ̿̑ Ψ̿̒ Ψ̿̓ Ψ̿̔ Ψ̿̕ Ψ̖̿ Ψ̗̿ Ψ̘̿ Ψ̙̿ Ψ̿̚ Ψ̛̿ Ψ̜̿ Ψ̝̿ Ψ̞̿ Ψ̟̿ Ψ̠̿ Ψ̡̿ Ψ̢̿ Ψ̣̿ Ψ̤̿ Ψ̥̿ Ψ̦̿ Ψ̧̿ Ψ̨̿ Ψ̩̿ Ψ̪̿ Ψ̫̿ Ψ̬̿ Ψ̭̿ Ψ̮̿ Ψ̯̿ Ψ̰̿ Ψ̱̿ Ψ̲̿ Ψ̳̿ Ψ̴̿ Ψ̵̿ Ψ̶̿ Ψ̷̿ Ψ̸̿ Ψ̹̿ Ψ̺̿ Ψ̻̿ Ψ̼̿ Ψ̿̽ Ψ̿̾ Ψ̿̿

Kaj jen, montrante la tigajn signetojn, dekoj de dek ĝis cent (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100):

Ψ † †̂ †̃ †̄ †̅ †̆ †̇ †̈ †̉ †̊ †̋ †̌ †̍ †̎ †̏ †̐ †̑ †̒ †̓ †̔ †̕ †̖ †̗ †̘ †̙ †̚ †̛ †̜ †̝ †̞ †̟ †̠ †̡ †̢ †̣ †̤ †̥ †̦ †̧ †̨ †̩ †̪ †̫ †̬ †̭ †̮ †̯ †̰ †̱ †̲ †̳ †̴ †̵ †̶ †̷ †̸ †̹ †̺ †̻ †̼ †̽ †̾ †̿

El ili, kvinuj havas pli "ornamajn" variantojn (20, 30, 40, 50, 60):

• † †̂ †̃ †̄ †̅ †̆ †̇ †̈ †̉ †̊ †̋ †̌ †̍ †̎ †̏ †̐ †̑ †̒ †̓ †̔ †̕ †̖ †̗ †̘ †̙ †̚ †̛ †̜ †̝ †̞ †̟ †̠ †̡ †̢ †̣ †̤ †̥ †̦ †̧ †̨ †̩ †̪ †̫ †̬ †̭ †̮ †̯ †̰ †̱ †̲ †̳ †̴ †̵ †̶ †̷ †̸ †̹ †̺ †̻ †̼ †̽ †̾ †̿

Krom ordinarajn ciferojn, Sabimo uzas specialajn signojn por kelkaj specialaj nombroj. Jen la "ciferoj" de nombroj  $e$  (= nombro de Eŭler (aŭ "Ojler"), bazo de naturaj logaritmoj),  $\pi$  (= rilato inter diametro kaj perimetro de cirklo) kaj  $i$  (= kvadrata radiko de minus unu);

$\Phi \triangleright 1.618033988749895$

$\theta \triangleright 3.141592653589793$

$\Psi \triangleright \sqrt{-1}$

## *Aritmetiko*

En ĉi ĉapitro ni ne instruas kalkulmetodon. Ni nur montras al tiu, kiu jam scias matematikon, kiel oni skribe prezentas ĝin per sabimaj simboloj.

En unua ekzemplo ni sumigas la tagojn de kvar sinsekvaj jaroj (  $365 + 365 + 365 + 366 = 1461$  ):

$$\begin{array}{r} \uparrow \uparrow \\ \downarrow 6 \downarrow \\ \downarrow 6 \downarrow \\ \downarrow 6 \downarrow \\ \downarrow 66 \\ + \hline 1461 \end{array}$$

En dua ekzemplo ni kalkulas diferencon inter tridektaga kaj luna (sinoda) monatoj (  $30 - 29,5306 = 0,4694$  ). La plej supraj ciferetoj estas "pruntmemoriloj":

$$\begin{array}{r} \overset{9}{\downarrow} \overset{9}{\downarrow} \overset{9}{\downarrow} \overset{9}{\downarrow} \overset{4}{\downarrow} \\ \downarrow 0.0000 \\ \downarrow \uparrow 9. \downarrow \downarrow 06 \\ \hline 0.4694 \end{array}$$

En tria ekzemplo ni kalkulas sesdek oblaŭ kvardek sep (  $60 \times 47 = 2820$  ):

$$\begin{array}{r}
 60 \\
 \underline{47} \\
 420 \\
 + 120 \\
 \hline
 2820
 \end{array}$$

En kvara ekzemplo ni kalkulas dumil okcent dudek dividab cent dudek ok (  $2820 / 128 = 22,03125$  ). Rimarku kiel eblas kunigi la dekpruntan memorilon kun la grandigata per ĝi cifero (cifero 2 en nombro 320):

$$\begin{array}{r}
 \nabla 2820 \cdot 0,125 \\
 2820 \overline{) 128} \\
 \underline{126} \\
 160 \\
 \underline{126} \\
 340 \\
 \underline{320} \\
 20 \\
 \underline{20} \\
 0
 \end{array}$$



En kvina ekzemplo ni elkalkulas kia frakcio estas tiu dekuma restaĵo nul komo nul tri unu du kvin (  $1 / 0,03125 = 32$  , do  $22,03125 = 22 \frac{1}{32}$  ):

$$\begin{array}{r}
 \phantom{1} \cdot 00000 \overline{) 0.03125} \\
 \underline{9} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\
 6 \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\
 \underline{6} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \phantom{0} \\
 0
 \end{array}$$

Ĝenerala signo de funkcia rilato estas minuseska cirklangulo. Ekzemple, absoluta valoro de tri minus sep estas kvar (  $\text{abs}(3 - 7) = |3 - 7| = |-4| = 4$  ) jen:

$$\langle \underline{3} \underline{-} \underline{7} \rangle \quad \nabla \quad \underline{3} \underline{-} \underline{7} \quad \nabla \quad \underline{3} \underline{-} \underline{7} \quad \nabla \quad \underline{3} \underline{-} \underline{7}$$

Funkcia signo de faktorialo simpligeblas per obligeska kruco. Faktorialo de kvin (  $\text{fak}(5) = 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$  ) jen:

$$\curvearrowright \underline{5} \quad \nabla \quad \underline{5} \quad \nabla \quad \underline{1} \underline{-} \underline{2} \underline{-} \underline{3} \underline{-} \underline{4} \underline{-} \underline{5} \quad \nabla \quad \underline{1} \underline{0}$$

Nombrobazon signas potenceska kruco. En sesa ekzemplo ni rekalkulas deksexuman nombron unu kvin sep al dekuma tricent kvardek tri (  $157_{\text{deksex}} = 1 \times 16^2 + 5 \times 16 + 7 = 256 + 80 + 7 = 343_{\text{dek}}$  ):

$$\begin{array}{l}
 \overline{1} \overline{5} \overline{7} \quad \nabla \quad \overline{1} \quad \overline{5} \quad \overline{16} \overline{1} + \overline{5} \overline{16} + \overline{7} \quad \nabla \\
 \nabla \quad \overline{1} \quad \overline{5} \quad \overline{16} \overline{1} + \overline{5} \overline{16} + \overline{7} \quad \nabla \quad \overline{3} \overline{4} \overline{3}
 \end{array}$$

En sepa ekzemplo ni sumigas kvadratojn de unu ĝis kvar ( $\Sigma_{(c=1,4)} c^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$ ):

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{\phantom{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}} \quad \nabla$$

$$\nabla \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \quad \nabla \quad \nabla 0$$

En oka ekzemplo ni obligas nombrojn du per si mem ĝis tria potenco ( $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ ):

$$2 \times 2 \times 2 \quad \nabla \quad 2^3 \quad \nabla \quad 8$$

En naŭa ekzemplo ni potencigas kvin per minus du ( $5^{-2} = 5^{-2} = 5^{-2} = 1/5^2 = 1/25$ ):

$$5^{-2} \quad \nabla \quad 5^{-2} \quad \nabla \quad 5^{-2} \quad \nabla \quad 5^{-2} \quad \nabla \quad 5^{-2}$$

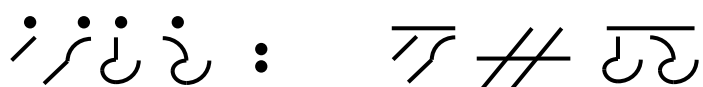
En deka ekzemplo ni dufoje potencigas tri kun si mem, komencante de maldekstre ( $(3^3)^3 = 27^3 = 27 \times 27 \times 27 = 729 \times 27 = 19683$ ):

$$\overline{27} \times 27 \quad \nabla \quad 27^3 \quad \nabla \quad \begin{array}{r} 27 \\ 27 \\ 27 \\ \hline 729 \\ + 27 \\ \hline 19683 \end{array} \quad \nabla \quad 19683$$



## Geometrio

Difinu ni pri kvar punktoj A, B, C,  $\hat{C}$ , ke linio AB paralelas kun linio  $C\hat{C}$ :



Daŭrige ni konstata ke linio AC ne paralelas kun linio  $B\hat{C}$  ( AC <ne paralelas kun>  $B\hat{C}$  ):



kaj ke la distanco |AB| estas pli granda ol distanco | $C\hat{C}$ | (|AB| > | $C\hat{C}$ |):



En trapezo  $ABC\hat{C}$ , diagonalo |AC| estas tri kaj surfaco de la trapezo estas ok:



Difinante kvinan punkton D sur linio  $C\hat{C}$ , tiel ke distancoj  $|CD|$  egalas al  $|AB|$ , ni konstatas ke kvarangulo ABCD estas paralelogramo. Kruca signo kun duobla horizontalo kaj ligas asertojn dum sago kun duobla horizontalo signifas igon (Linio AB paralelas al linio CD <kaj> distanco CD egalas al distanco AB, <igas ke> kvarangulo ABCD egalas al paralelogramo ABCD):

$$\overline{AB} \neq \overline{CD} \quad \neq \quad \overline{AB} \triangleq \overline{CD}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{AB}} \triangleq \overline{\overline{CD}}$$

En kvadrato EFG $\hat{G}$ , diagonalo F $\hat{G}$  egalas longon de flanko EF oble kvadrata (= dua) radiko de du ( $|F\hat{G}| = |EF| \times \sqrt{2}$ ):

$$\overline{\overline{EF}} : \overline{F\hat{G}} \triangleq \overline{\overline{EF}} \sqrt{2}$$

Difininte du punktojn ho kaj  $\hat{h}$ o, ni nomas cirklon ho- $\hat{h}$ o tiun kies centro estas ho kaj perimetro trafas  $\hat{h}$ o. Ankaŭ  $\hat{g}$ ia radiuso povas nedifinende nomi $\hat{g}$ i ho- $\hat{h}$ o:

$$\hat{g} : \hat{g} \triangleq \hat{g}$$

Donante al cirklo anstataŭe unuliteran nomon, ekzemple  $\hat{j}$ o, oni povas tiel aserti ke  $\hat{g}$ ia radiuso estas duona  $\hat{g}$ ia diametro:

$$\hat{j} : \hat{j} \triangleq \hat{j}$$

Angulo  $v$  estas 90 gradoj, kio egalas al 100 gonoj kaj al  $\pi/2$  radianoj (  $v = 90^\circ = 100 \text{ gon} = \pi/2 \text{ rad}$  ) jen:

$$\sphericalangle \triangleright 90^\circ \triangleright 100^\circ \triangleright \theta \text{ rad}$$

Solido BCPĈMK nomiĝas solido T. Ĝi membras en 3-dimensia spaco f. Ties spacangulo BCP estas 0,17 steradianoj. Jen:



$$\sphericalangle \triangleright 0.17 \text{ rad}$$

Sinuso de zesajho  $[\theta]$  estas pli malgranda ol kosinuso de zezaho  $[\delta]$  plus tangenso de zesajho (  $\sin \theta < \cos \delta + \tan \theta$  ):

$$\sin \theta < \cos \delta + \tan \theta$$

Ekzistas aliaj simboloj pri geometriaj kaj kalkulaj konceptoj. Ili troveblas en resumo laste en ĉi kajero.

# Algebro

Ni montras kalkulan skribmanieron per ekzemploj.

## Kalkuloperacioj

Pluso estas ofte staranta kruco kvarsimetria, kiel pluso "latina", kaj egalsigno estas surpinte staranta triangulo. Jen "bo plus co egalas al do" ( $b + c = d$ ):

$$\swarrow + \cup \nabla \searrow$$

Minusa kaj obligaj signoj estas ĉu malgranda ronda angulo kun bazo horizontala, ĉu similtformaj pli granda signo kiu samtempe funkcias kiel parentezo. Minusa signo havas sian vertikalan parton dekstre, obligaj maldekstre. Diferenciga signo malsimetrias kompare kun egaliga signo. Jen "bo minus co, oble do, minus fo oble go, ne pli grandas ol ho" ( $(b - c) \times d - (f \times g) \leq h$ ):

$$\underline{\swarrow \cup \searrow} / \underline{\swarrow \cup \searrow} \nabla$$

$$\nabla \underline{\swarrow \cup \searrow} / \underline{\swarrow \cup \searrow} \nabla \searrow$$

Divida signo estas 180-grade turnita kompare kun obligata signo. Tio donas kombineblojn inter ili. Spegula signo de divido indikas bazon kaj potencon. Jen "bo potenco co, divide per do minus fo proksimume egalas al unu sesono" ( $b^c / (d - f) \approx 1/6$ ):

$$\overline{b} \overline{c} \overline{d} \overline{f} \approx 1/6$$

Samon eblas ankaŭ pli vertikale skribi:

$$\begin{array}{c} \overline{b} \\ \overline{c} \\ \overline{d} \end{array} \overline{f} \approx 1/6$$

Inversan potencon per "nur tri signoj" eblas trimumiere skribi. Jen "do potenco minus co egalas al divido per do potenco co" ( $d^{-c} = 1 / d^c$ ):

$$\overline{d} \overline{c} \approx \overline{d} \overline{c} \approx \overline{d} \overline{c} \approx$$

$$\approx 1/\overline{d} \overline{c} \approx 1/\overline{d} \overline{c} \approx \overline{d} \overline{c}$$



Tiun lastan signon als malplena oni uzas je procenta, promila, milionona aŭ alia dekpotencona simbolo. Jen "kvarcent dudek kvin promiloj egalas al kvardek du komo kvin procentoj" (  $425\text{‰} = 42,5\%$  ):

$$425\text{‰} \triangleq 42,5\%$$

Radikojn oni skribas uzante la samajn erojn. Jen "kvadrata radiko de bo pli malgrandas ol kubika radiko de co" (  $\sqrt{b} < c^{1/3}$  ):

$$\sqrt{b} < \sqrt[3]{c}$$

Duagrada ekvacio havas ĝeneralan solvon laŭ jena formulo (  $x^2 + p x + q = 0 \Rightarrow x = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$  ):

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nombrobazon tenas potenceska kruco. Ĝi skribeblas ĉu sub la nombro, ĉu antaŭ la nombro(j). Jen "dekduume unu nul nul egalas al dekume cent kvardekkvar" (  $100_{\text{dekdu}} = 144_{\text{dek}}$  ):

$$\frac{100}{\Psi} \triangleq \frac{100}{\Psi 11} \triangleq \frac{111}{\Psi} \triangleq \Psi 111$$



Kondiĉoj de funkcio skribeblas post dupunkto. Jen kalkulo ke "sumo de fo estas sumo de funkcio fo de ikĥo, kio estas sumo de funkcio fo de ikĥo inter ikĥo egalas al po kaj ikĥo egalas al kuo, kio estas la sumo de funkcio fo de ĉiuj entjeroj de po ĝis kuo" ( $\Sigma f = \text{sum}(f) = \text{sum}(f(x)) = \text{sum}(f(x); f = p, q) = f(p) + f(p+1) + f(p+2) + f(p+3) + \dots + f(q-1) + f(q)$ ):

$$\begin{aligned}
 & \underline{f(p)} \quad \nabla \quad \underline{f(p+1)} \quad \nabla \quad \underline{f(p+2)} : \dots \nabla \quad \underline{f(q)} \\
 & \nabla \quad \underline{f(p) + f(p+1) + f(p+2) + f(p+3) + \dots} \\
 & \dots + \underline{f(q-1) + f(q)}
 \end{aligned}$$

Sumo havas eĉ propran simbolon kiu kombinas funkciajn kaj plusan signojn. Jen konstato ke "kio estas funkcio de do kaj co (aŭ de do, no kaj co) tiel ke ko estas la sumo de funkcio do de no kie no estas de ĉiu entjero do de nul ĝis co" ( $k(d, c) = k(d, n, c) = \text{sum}(d(n); n = 0, \dots, c) = \Sigma_{(n=0, c)} d(n) = \Sigma_{(0, c)} d$ ):

$$\begin{aligned}
 & \underline{f(p)} \quad \nabla \quad \underline{f(p+1)} \quad \nabla \quad \underline{f(p+2)} : \dots \nabla \quad \underline{f(q)} \\
 & \nabla \quad \underline{f(p) + f(p+1) + f(p+2) + \dots} \\
 & \nabla \quad \overline{f(p) + f(p+1) + f(p+2) + \dots} \quad \nabla \quad \overline{f(p) + f(p+1) + f(p+2) + \dots}
 \end{aligned}$$

Alia norma funkcio estas produto seria. Tiu havas ankaŭ propran simbolon kiu kombinas signojn funkciajn kaj faktorialan. Jen konstato ke "budeh estas funkcio de coj kaj deh tiel ke budeh estas la produto de ĉiuj entjeroj muniĝ de coj ĝis deh" ( $b = f(c, d) = \text{prod}(m; m = c, \dots, d) = \prod_{(m=c, d)} m = \text{fak}(d) / \text{fak}(c) = d!/c!$ ):

$$\frac{d!}{c!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot d}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot c} = \overbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot d}^{c \text{ faktoroj}} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot c}$$

$$\frac{d!}{c!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot d}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot c} = \frac{d!}{c!}$$

Por logaritmo uzeblas funkcia signo kun tri normaj mallongigoj. Jen konstato ke duuma logaritmo de kvar egalas al natura logaritmo de ties bazo kvadrata, egalas al dekuma logaritmo de cent, egalas al du ( $\log_2 4 = \ln e^2 = \lg 100 = 2$ ):

$$\log_2 4 = \ln e^2 = \lg 100 = 2$$

Ankaŭ limvalora funkcio difinas kondiĉon. Jen limvaloro, kiam keĉojh proksimiĝas al unu, de keĉojh kvadrata minus unu divide per keĉojh minus unu egalas al du ( $\lim_{(x \rightarrow 1)} (x^2 - 1)/(x - 1) = 2$ ):

$$\lim_{(x \rightarrow 1)} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$





La funkcion kuo dufoje, per kaj ikho kaj ipsilono, ni derivas  
 $(d^2q/dxdy = d^2(3x^2 + 4xy + 5y)/dxdy = d(6x + 4y)/dy = 4)$   
 jen:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial q}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (6x + 4y) = 6$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (6x + 4y) = 4$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (6x) = 6$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial q}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (4y) = 4$$

Pluroble pluroblan derivaĵon oni skribas ekzemple tiel ( $z = d^4q(x,y) / (dx dx dy dy) = d^4q(x,y) / (dx^2 dy^2)$ ):

$$\frac{\partial^4 q}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right)$$

Eblas kombini plurajn integrigojn kaj derivojn jene ( $s = \iiint q(x,y,z) dx^2 dy^2 d^2q/dz^2$ ):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right) \right)$$

Ni integrigas la funkcion kuo per ikho ( $\int (3x^2 + 4xy + 5y) dx = x^3 + 2x^2y + 5xy + k$ ) jen – uzante literon k por nekonata konstanto:

$$\text{Ri} \triangleq \int (3x^2 + 4xy + 5y) dx$$

$$\triangleq x^3 + 2x^2y + 5xy + k$$

Jen integrigas ni la funkcion kuo per ikho inter ikho egalas al unu kaj ikho egalas al kvar ( $\int_{(x=1, 4)} q(x) dx = \int_{(x=1, 4)} (3x^2 + 4xy + 5y) dx = \int_{(x=1, 4)} x^3 + 2x^2y + 5xy + k = (4^3 + 2 \times 4^2y + 5 \times 4y + k) - (1^3 + 2 \times 1^2y + 5 \times 1 \times y + k) = (64 + 32y + 20y + k) - (1 + 2y + 5y + k) = 63 + 45y$ ):

$$\text{Ri} \triangleq \int_{(x=1, 4)} (3x^2 + 4xy + 5y) dx$$

$$\triangleq \int_{(x=1, 4)} x^3 + 2x^2y + 5xy + k dx$$

$$\triangleq \int_{(x=1, 4)} x^3 + 2x^2y + 5xy + k dx$$

$$\triangleq 64 + 32y + 20y + k - (1 + 2y + 5y + k)$$

$$\triangleq 63 + 45y$$



En ĉi ekzemplo ni integrigas la funkcion kio dufoje per ikho kaj ipsilono en domajno ŝo ( $\iint_{\mathcal{S}} q(x,y) dx dy = \iint_{\mathcal{S}} (3x^2 + 4xy + 5y) dx dy = \int_{\mathcal{S}} (x^3 + 2x^2y + 5xy + k_1) dy = [x^3y + x^2y^2 + 5xy^2 + k_1y + k_2]_{\mathcal{S}} = [(x^2 + 5x)y^2 + (x + k_1)y + k_2]_{\mathcal{S}}$ ):

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\mathcal{S}} (x^2 + 5x)y^2 + (x + k_1)y + k_2 \right) dt \quad \nabla$$

$$\nabla \int_{\mathcal{S}} (x^2 + 5x)y^2 + (x + k_1)y + k_2 \quad \nabla$$

$$\nabla \int_{\mathcal{S}} (x^2 + 5x)y^2 + (x + k_1)y + k_2 \quad \nabla$$

$$\nabla \int_{\mathcal{S}} (x^2 + 5x)y^2 + (x + k_1)y + k_2$$



Matricon mo ni obligas per ĝia transponaĵo ( $M \times M^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{pmatrix}$ ) jen:

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \left. \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ 3 \quad 4 \\ 5 \quad 6 \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad 5 \\ 2 \quad 4 \quad 6 \end{array} \right| \end{array} \quad \nabla$$

$$\nabla \quad \left. \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ 3 \quad 4 \\ 5 \quad 6 \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \\ 3 \quad 3 \end{array} \right| \quad \nabla \quad \left. \begin{array}{c} 2 \quad 2 \quad 2 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right| \quad \nabla$$

Per ciferoj nul kaj unu skribiĝas matricoj nula kaj identa. Inversan matricon indikas divideska kurbo je ĝia matrica supersigno, kaj ankaŭ ĝian matrican krampon finas kurbo divideska. Jen ekvacio obligas per matricoj ĥo kaj ĝia inverso ( $\hat{H} \times \hat{H}^{-1} = I$ ):

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \left. \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right| \quad \nabla \quad \uparrow \\ 1 \end{array}$$

En jena ekzemplo ni kontrolas ke matricoj  $\hat{S}$  oble sia inversa matricoj fariĝas identaj matricoj ( $\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = (1/-2) \times \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\hat{S} \times \hat{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times (1/-2) \times \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ ):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$



Alivorte, la aro  $\hat{J}$  enhavas subaron kiu konsistas el elementoj mo kaj no (  $\hat{J} \langle \text{enhavas} \rangle \{m, n\}$  ):

$$\overset{+}{\cup} \ni \overline{|r-|}$$

Aran union signas du krucoj kunigitaj malsupre per duoncirklo. Jen en union kunigas ni arojn  $\hat{J}$  kaj  $\hat{H}$  (  $\hat{J} \cup \hat{H} = \{k, l, m, n, o, p\} \cup \{\hat{g}, i, k, l, 5\} = \{\hat{g}, i, k, l, m, n, o, p, 5\}$  ):

$$\overset{+}{\cup} \text{ } \overset{+}{\cup} \quad \nabla$$

$$\nabla \overline{|r-l-r-|-p-c} \text{ } \overset{+}{\cup} \overline{|o-\sim-r-l-|} \quad \nabla$$

$$\nabla \overline{|o-\sim-r-l-r-|-p-c-|}$$

Aran samecon signas du krucoj kunigitaj supre per duoncirklo. Jen samecon komunigas ni el aroj  $\hat{J}$  kaj  $\hat{H}$  (  $\hat{J} \cap \hat{H} = \{k, l, m, n, o, p\} \cap \{\hat{g}, i, k, l, 5\} = \{k, l\}$  ):

$$\overset{+}{\cap} \text{ } \overset{+}{\cap} \quad \nabla$$

$$\nabla \overline{|r-l-r-|-p-c} \text{ } \overset{+}{\cap} \overline{|o-\sim-r-l-|} \quad \nabla$$

$$\nabla \overline{|r-l}$$

# Langolaj runoj

Langolaj runoj origine ampleksis sep vokalojn, du "duonvokalojn", dudek du unusonajn konsonantojn kaj du kombinajn, tio estas afrikatoj. Jen la vokaloj kaj duonvokaloj ah [a], eh [ε], ih [i], jah [j], oh [o], uh [u], ŭah [ʊ], oeh ([ø], [œ] aŭ [ə]) kaj iuh ([y], [i] aŭ [ɥ]):

| / / / \ \ \ \ ( O

Jen la kombinaj konsonantoj ĝeh [dʒ] kaj ĉoh [tʃ]:

ŝ ʒ

Jen frikativoj ĵih [ʒ], zah [z], ŝah [ʃ], suh [s], vih [v], zeh [ð], ĥah [χ], fah [f], soh [θ], ĥuh [x] kaj huj [h]:

ɛ ʃ ɹ ʒ ɰ ɸ ɹ ɸ ɰ ɰ

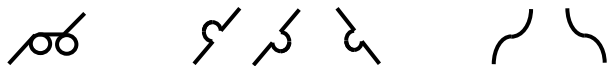
Jen plozivoj bih [b], deh [d], gah [g], pah [p], toh [t] kaj kuh [k], nazaloj him [m], hen [n] kaj hang [ŋ], du formoj de lateralo leh [l] kaj la vibranto roh [r]:

ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ

Ĉi konsonantaj signoj konsistas el streko kaj cirklo kaj skribiĝas de maldekstro dekstren, krom la vertikalaj kiujn oni skribas de supro malsupren. La cirklo de voĉa konsonanto situas maldekstre de la streko, de senvoĉa

dekstre, de lipa en supra parto de la signo, de koronala en meza kaj de vela en malsupra parto.

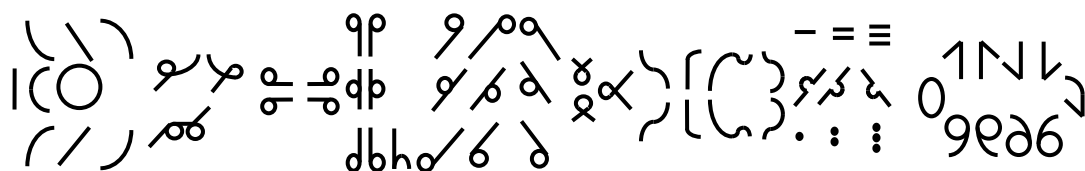
Al tiuj runoj poste aldoniĝis afrikato coh [ts], retrofleksaj konsonantoj urdeh [d], urtoh [t] kaj heurn [ŋ] kaj pli ornamaj aspektoj de vokaloj iho [i] kaj uho [u]:



Evoluiĝis krome pliaj vokaloj aeh [æ], ieh [e], ŭih [y], aoh [a], uoh [ɔ] kaj juh [u] jen:



Kun runoj estis uzataj ankaŭ sabimaj ciferoj kaj interpunkcioj per streketoj kaj pokoj – kiuj povis esti cirkletoj. La tuta signaro de langolaj runoj kutime prezentiĝis en jena simetrieska formo:



Ekzemplo je runa skribo jen:

= 2\2U 701-0 4 702/ 978\91  
 P79\ 7/ 800\8 702/9\ = 7  
 7/ 9001- 702/7 197026-  
 7k 2\2 4 702/ 702 702U  
 h191- 702\2U 7 7/ =





Ekvacia sistemo

Absolutumo

Funkcio de

Sumo inter de

Derivaĵo de per

Integralo de per

Egalas al  $\nabla$

Malegalas al  $\nexists$

Pli grandas ol  $\triangleright$

Ekvivalentas al  $\nabla$

$\cup$   
Aro

$\complement$   
Komplementa aro

Ara unio  $\cup$

Enhavas  $\supseteq$

$\mathbb{P}$   
Matrico

$\mathbb{P}$   
Inversa matrico

Nombrobazo

Faktorialo

Funkcio de

Produkto inter de

Derivaĵo dua de per  $\uparrow$

Integralo dua de per  $\uparrow$

Proksimumas al  $\nabla$

Malgrandas ol  $\triangleleft$

Nepligrandas ol  $\triangleleft$

Igas ke  $\Rightarrow$

Areroj

Eroj de komplementa aro

Ara samo  $\cap$

Membras en  $\in$

Eroj de matrico

Eroj de inversa matrico


Transpona <sup>T</sup>matrico

Paralelas kun  $\parallel$

Punkto 


Radio 

Diagonalo 

Radiuso 

Ebeno 

Vektoro 

Surfaco 


Elipso 

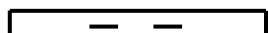
Triangulo 

Ekvilaterala triangulo 

Orta triangulo ekvilaterala 


Kvarangulo 

Kvadrato 


Paralelogramo 

Eroj de transpona matrico

Ne paralelas al  $\nparallel$

Linio 

Distanco 

Diametro 

Perimetro, -parto 

Eroj de determinanto

Vektore produktita kun  $\times$

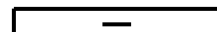
Cirklo 


Sektoro 

Ekvivalenta triangulo 

Orta triangulo 


Duona triangulo ekvival. 

Rektangulo 


Rombo 

Trapezo 

  
Plurangulo


  
Angulo

Gradoj  $^{\circ}$


  
Spaca angulo

  
Spaco


  
Solido


  
Elipsoido

  
Konuso

  
Kuboido

  
Pluredro


  
P-dimensia korpo

  
P-angulo regula

Radianoj  $\ominus$


Gonoj  $\oslash$


Steradianoj  $\oplus$

  
Spaco tridimensia

  
Sfero

  
Cilindro

  
Piramido P-flanka regula

  
Kubo

  
P-edro regula

# Ŝlosilo al langolaj literoj

## *Langole majuskla alfabeto de esperanto*

Jen literoj a, b, c, ĉ, d, e, f, g, ĝ:

/ ʃ ɔ ɔ / ˆ ʃ ʃ ʃ

Jen literoj h, ĥ, i, j, ĵ, k, l, m, n, o:

ʒ ʒ ʒ ʒ ʒ ʒ ʒ ʒ ʒ

Jen literoj p, r, s, ŝ, t, u, ŭ, v, z:

ʃ ʃ ʃ ʃ ʃ ʃ ʃ ʃ

## *Ekzerca teksto je langola runa skribo*

Runoj estas la plej malnova formo de langola skribo. En ĝi mankas fonetika amplekso, ĉar nur la plej oftaj sonoj havas signojn en ĝi.

# Enhavo

Antaŭparolo	3	Aroteorio	29
Legendo pri Saba	4	Langolaj runoj	31
Sistematematiko	5	Resumo	33
Sabimaj ciferoj	5	Ŝlosilo al langolaj literoj	37
Aritmetiko	7	Langole majuskla alfabeto de	
Geometrio	12	esperanto	37
Algebro	15	Ekzerca teksto je langola runa	
Kalkuloperacioj .....	15	skribo	37
Funkcioj.....	18	Enhavo	38
Derivaĵoj kaj integraloj.....	21		
Lineara algebro.....	26		